数理解析研究所講究録
707巻 1989年 89-103

Relative Operator Entropy について

大阪府立桃谷高校　亀井栄三郎(Eizaburo Kamei)

1、Introduction.　Entropy とは一言で言えば“混沌さ”を測る量と言えよう。von Neumann は、彼の著書「量子力学の数学的基礎」[14]において、statistical operator A，即ち、$A \in T(H)_{+,1}$，Hilbert space H 上の positive trace class operators で $\mathrm{tr}\, A = 1$，に対して、

$$s(A) = -\mathrm{tr}\, A \log A$$

として entropy を与えている。Umegaki は σ-finite von Neumann algebra に対し、relative entropy を定式化することに成功した。彼の定式化は von Neumann algebra を $B(H)$ としたとき、次の様になる。[17]，[18].

$$s(A \mid B) = \mathrm{tr}\, A(\log A - \log B), \quad A, B \in T(H)_{+,1}.$$

又、Nakamura と Umegaki [13] は、von Neumann の entropy を一般化し、H 上の positive operator A に対し、operator entropy を

$$S(A) = -A \log A$$

で与えた。ここでは、この operator entropy の相対化は、どの

様なものか、という事について考える。

Umegaki の relative entropy は、その後、Araki によって、Tomita Takesaki theory を用いることで、一般の von Neumann algebra 上の positive linear functional にまで拡張された。[1],[2]。
ところが Uhlmann [16] は、この relative entropy を interpolational theory を用いる事で $*$-algebra にまで拡げた。そこで、relative operator entropy を与えるに当たって、まず Uhlmann の方法を簡単に見直す事から始める。

まず、ϕ, ψ を $*$-algebra $\mathcal{A}$ 上の positive linear functional とし、$\mathcal{A} \ni 1$ とする。ここで sesquilinear form を次の様に与える。

$$\langle x, y \rangle = \phi(xy^*) + \psi(y^*x) .$$

通常の方法で $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ という inner product とし、$\mathcal{A}$ から Hilbert space を構成する。このとき Pusz-Woronowicz [14] によって、この Hilbert space 上に可換な positive operators A, B で $A+B=1$,

$$\phi(xy^*) = \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle , \quad \psi(y^*x) = \langle B\tilde{x}, \tilde{y} \rangle$$

となるものが取れる。この事より Uhlmann は relative entropy を

$$s(\phi|\psi) = -\lim_{r \to +0} \frac{1}{r} \langle (A^{1-r}B^r - A)\hat{1}, \hat{1} \rangle$$

で与えている。Uhlmann の定義は、$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}(x^r - 1) = \log x$、という事実に基づいて与えられている。

ところで、$A^{1-r}B^r$ は、$r = \frac{1}{2}$ のとき丁度 geometric mean であり、その一般形を表わしたもの、と考えてよい。そこで、

これを operator mean の立場から見直してみる。operator mean の理論は、Kubo-Ando [10] によって完成された。

operator mean m とは、Hilbert space 上の positive operators 上の binary operation で次の性質を持つものを言う。

(1) monotonity $A \leq B,\ C \leq D \Rightarrow A\, m\, C \leq B\, m\, D.$

(2) semicontinuity $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B \Rightarrow A_n\, m\, B_n \downarrow A\, m\, B.$

(3) transformer inequality $T^*(A\, m\, B)T \leq T^*AT\, m\, T^*BT.$

(3) の等号は T が invertible のとき成立。

この operator mean m は、$1\, m\, x = f(x)$ で $[0,\infty)$ 上の positive operator monotone function と1対1に対応している。実際に、positive operators A, B に対しては、A, B が invertible という仮定の下で

$$(*)\qquad A\, m\, B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

という形で表わす事ができる。この事を最初に指摘したのは Y. Kato である。[3], [4]。

2、Relative Operator Entropy. Operator mean における対応 (*) を x^r, $0 \leq r \leq 1$, という operator monotone function にあてはめると $A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}$ となり、A と B が可換の場合は $A^{1-r}B^r$ という Uhlmann の relative entropy の定義の中に出てきた形が得られる。そこで、$1\, g_r\, x = x^r$, $0 \leq r \leq 1$ によって定

まる operator mean を Uhlmann の定義に当てはめると、

$$
\begin{aligned}
S(A|B) &= s\text{-}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(A\,g_r\,B - A)\\
&= s\text{-}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}A^{\frac{1}{2}}\{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^r - 1\}A^{\frac{1}{2}}\\
&= A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

ここで A, B は invertible である、と仮定しているから問題はないが、一般には、この極限が存在するとは限らない。この存在性の議論については、J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo [8] によって詳しく議論されているので、それに譲り、ここでは、極限が存在する場合に限り話を進めていく事にする。このときは、operator mean の場合と同様、invertible なもので近似すればよいから、以下 invertible な operators と仮定しても一般性は失なわない。

ところで Uhlmann は $\phi(xx^*)^{\frac{1}{2}}$ と $\psi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ という seminorm 間の quadratic interpolation として、$\langle A^{1-r}B^r\tilde{x},\tilde{x}\rangle^{\frac{1}{2}}$, $0\leq r\leq 1$, を与えているのであるが、上で与えた $\{A\,g_r\,B\}$, $0\leq r\leq 1$, は丁度、これの operator 版となっている事がわかる。実際

$A\,g_0\,B = A$, $A\,g_1\,B = B$, $A\,g_{\frac{1}{2}}\,B = A\,g\,B$ (geometric mean)

であり、A, B に対して、$r \longrightarrow A\,m_r\,B$ は連続となっている。又、[18] の第9章にまとめられている quadratic interpolation の持つ様々の性質と同様の性質が成り立っている。例えば、"Wigner-Yanase-Dyson-Lieb-Uhlmann の concavity" に相等す

るものも、g_r が operator mean である、という事より次の様に簡単に示す事ができる。

$$A \geqq \alpha A_1 + \beta A_2, \quad B \geqq \alpha B_1 + \beta B_2, \quad \alpha, \beta \geqq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

のとき

$$\begin{aligned} A \, g_r \, B &\geqq (\alpha A_1 + \beta A_2) \, g_r \, (\alpha B_1 + \beta B_2) \\ &\geqq \alpha (A_1 + B_1) \, g_r \, \beta (A_2 + B_2) . \end{aligned}$$

そこで、先程得た

$$S(A \mid B) = A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

を Uhlmann の relative entropy の operator 版として、"relative operator entropy" と呼ぶのが妥当であろう、との結論を得た。[6]。

又、これは、$B = 1$ とした場合、$S(A \mid 1) = -A \log A$ となり、Nakamura and Umegaki [13] の operator entropy とも一致する。

operator mean の議論においては、それを表現する operator monotone function に、positive という制限がついていた。この制限をはずして一般化できないか、例えば $\log x$ に対してはどうか、という問題は、以前より提起してきた事ではあったが、[5]，それにどの様な意味を持たせ得るか、という点については不確かなままであった。今、Uhlmann の方法を真似ることで、"relative operator entropy" との結論を得た事より、operator mean を拡張することの保障が得られた、と思う。

そこで、これに"solidarity(連帯)"との呼称を与える事とする。これはKubo and Andoが用いた"connection"に対応させたものである。即ち、一般のoperator monotone function $f(x)$に対し、

$$A \mathrm{s} B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

で与えられるものをsolidarityという。これについての一般的な議論は[8]に譲って、ここでは、relative operator entropyの基本的な性質についてまとめておく。

1. $B \leq C \Rightarrow S(A|B) \leq S(A|C)$.
2. $S(\alpha A|\alpha B) = \alpha S(A|B)$, $\alpha > 0$.
3. $S(A+B|C+D) \geqq S(A|C) + S(B|D)$
4. $A \geqq B$ 又は Aがinvertibleのとき $S(A|B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
5. Jointly concavity:

   $A = \alpha A_1 + \beta A_2$, $B = \alpha B_1 + \beta B_2$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

   $\Longrightarrow \quad S(A|B) \geqq \alpha S(A_1|B_1) + \beta S(A_2|B_2)$.
6. Peiels-Bogoliubov型不等式

   Φ ; normal positive linear map, $\Phi(1)$はinvertible,

   $\Longrightarrow \quad \Phi(S(A|B)) \leq S(\Phi(A)|\Phi(B))$.

しかしながら、このrelative operator entropyがUmegakiのrelative entropyと一致するのは、AとBが可換なときのみである。一致しない例は2×2行列において簡単に見つける事ができる。にもかかわらず、これが有効である、と思える理

由の1つに、次の J.I. Fujii と Y. Seo [9] によって得られた結果がある。

M を II_1-factor von Neumann algebra とし、N を M の subfactor とする。このとき、M から N への conditional expectation が unique に存在し、これを E とする。次に

$$S(N) = \sup\{\|S(A|E(A))\| \;;\; 0 \leq A \leq 1,\ A \in M\}$$

とすると、次の Pimsner - Popa 型の定理が得られる。

Theorem 1.

$$S(N) = \log [M ; N] .$$

ここで [M;N] は Jones' index である。

3. Uhlmann's transformation. 次に、先程の $\{A\, g_r\, B\}, 0 \leq r \leq 1$, についてもう少し詳しく見て行く事にする。これは Uhlmann の使った quadratic interpolation の役割を果たしていたのであるが、ここで使われている性質は、g_r の持つ operator mean としてのものだけである。そこで、他にも同様の議論を組み立てる事はできないか、と考えるのは自然な事であろう。まず、arithmetic mean $A\, a\, B = \frac{A+B}{2}$ に関して、$A\, a_r\, B = (1-r)A + rB$, $0 \leq r \leq 1$, と与えれば、これは $A\, g_r\, B$ が持つ性質と全く同様の事が成り立つ。又、harmonic mean $A\, h\, B = \left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}$ に対しても $A\, h_r\, B = ((1-r)A^{-1} + rB^{-1})^{-1}$ とすれば同様である。そこで、こ

れらを使って、relative operator entropy を求めたのと同様の計算をそれぞれ行なってみる。

(a) $$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(A\ a_r\ B - A) = B - A$$

(h) $$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(A\ h_r\ B - A) = A - AB^{-1}A.$$

(h)についての計算は $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(1\ h_r\ x - 1) = 1 - x^{-1}$ であることより得る。

そこでこれらの solidarities をそれぞれ、

$$S_a(A\mid B) = B - A,\quad S_h(A\mid B) = A - AB^{-1}A$$

と表わすと、$S(A\mid B)$, $S_a(A\mid B)$, $S_h(A\mid B)$ の間に次の不等式が成り立つ。[7].

Theorem 2.

$$S_a(A\mid B) \geq S(A\mid B) \geq S_h(A\mid B).$$

最初の不等式は Klein の不等式としてよく知られている。後の不等号も $\log x \geqq 1 - x^{-1}$ より明らかである。

次に、この定理の関係を更に精密に評価できないか、という事について考える。その為には $1\ m_{(t)}\ x = \left(\frac{1+x^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}, -1\leq t\leq 1,$ によって与えられる operator mean が適当である。これは、power mean と呼ばれるもので [11], [12],

$t = 1$ のとき $\frac{1+x}{2} = 1\ a\ x$ (arithmetic mean)

$t = 0$ のとき $x^{\frac{1}{2}} = 1\ g\ x$ (geometric mean)

$t = -1$ のとき $\frac{2x}{1+x} = 1\ h\ x$ (harmonic mean)

となり、arithmetic mean から harmonic mean への parametarization

を与えており、かつ各 t において symmetric mean，即ち，

$A\ m_{(t)}\ B = B\ m_{(t)}\ A$，である。又、

$1 \geq t \geq s \geq -1$ ならば $A\ m_{(t)}\ B \geq A\ m_{(s)}\ B$

でもある。更に各 t に対して，

$$1\ m_{(t),r}\ x = (1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}},\quad 0 \leq r \leq 1$$

とすると，$\{A\ m_{(t),r}\ B\}_{0 \leq r \leq 1}$ は

$t=1$ のとき $\{A\ a_r\ B\}$，$t=0$ で $\{A\ g_r\ B\}$，$t=-1$ で $\{A\ h_r B\}$

となり、これらの一般形でもある。そこで、同様に Uhlmann 流の計算をすれば，

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(A\ m_{(t),r}\ B - A) = \frac{1}{t}\{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

となる。計算は，l'Hopital の法則を使うことで

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\{(1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}} - 1\}\\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{t}(1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}-1}(x^t-1)\\
&= \frac{1}{t}(x^t-1).
\end{aligned}$$

であることより得られる。この solidarity を

$$S_t(A|B) = \frac{1}{t}\{A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

とすれば，

$$S_1(A|B) = S_a(A|B),$$

$$S_0(A|B) = S(A|B)$$

$$S_{-1}(A|B) = S_h(A|B)$$

となり，$t \geq s$ のとき $S_t(A|B) \geq S_s(A|B)$

も得られる。又、先の定理を精密化したものとして、次を得る

Theorem 3. $t \in [0,1]$ とすれば

$$S_a(A|B) \geq S_t(A|B) \geq S(A|B) \geq S_{-t}(A|B) \geq S_h(A|B).$$

以上を整理すると $\left(\frac{1+x^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$ によって与えられる power mean に対し、solidarity $S_t(A|B)$ が対応し、しかもそれは $S(A|B)$ を通り、$S_a(A|B)$ と $S_h(A|B)$ の parametarization を与えている。またこの solidarity $S_t(A|B)$ は

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}(A\ m_{(t),r}\ B - A) = S_t(A|B)$$

によって与えられている。これは Uhlmann が relative entropy を与えた方法の operator 版であることより、この変換を、Uhlmann's transformation と呼ぶ事にする。

もう少し一般論らしく次の様にまとめる。

m を symmetric な operator mean とする。このとき次の性質をもつ m_r, $0 \leq r \leq 1$, を m に対する Uhlmann's interpolation と呼んでおく。

(I.1) $A\ m_0\ B = A$, $A\ m_1\ B = B$, $A\ m_{\frac{1}{2}}\ B = A\ m\ B$.

(I.2) $(A\ m_r\ B)\ m\ (A\ m_q\ B) = A\ m_{\frac{r+q}{2}}\ B$.

(I.3) 各 A, B に対し、$r \to A\ m_r\ B$ は連続。

ところで、$A\ m_{(t),r}\ B$ についてはこれらの条件は満たされているのであるが、全ての symmetric mean に対して必ずしも Uhlmann's interpolation が取れるとは限らない。

例えば、$f(x)=\frac{1}{8}(1+6\sqrt{x}+x)$ は symmetric mean を与える operator monotone function ではあるが、これによって決まる mean に対し、Uhlmann's interpolation を与えることはできない。

そこで当面、Uhlmann's interpolation が取れる様な symmetric mean の事を interpolational mean と呼ぶこととする。そして、m を interpolational mean, m_r を Uhlmann's interpolation としたとき

$$S_m(A|B) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(A\, m_r\, B - A)$$

を $A\, m\, B$ から $S_m(A|B)$ への Uhlmann's transformation と呼ぶ。

Theorem 4. m, n を interpolational mean とする。このとき

$$A\, m\, B \le A\, n\, B \text{ ならば } S_m(A|B) \le S_n(A|B).$$

以上は、Uhlmann の行なっている方法をそのまま真似ながら operator mean の言葉で一般論らしくしたにすぎず、本質は power mean で成されている事柄でしかない。特に条件 (I, 1) (I, 2), (I, 3) については Uhlmann が与えているものをそのまま書き直したものでしかない為、少し窮屈すぎる。今後若干の手直しをする必要があることを報告しておく。

On Relative Operator Entropy

Eizaburo Kamei

Abstract. In [6], we introduced the relative operator entropy by

$$S(A|B) = A^{1/2}(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2},$$

where A and B are invertible positive operators on a Hilbert space.

If B = 1, this coinsides with the operator entropy defined by Nakamura and Umegaki [7].

By this definition, a Pimsner - Popa type theorem is proved [9]; let M be a II_1 factor, N a subfactor of M, E the conditional expectation of M onto N and [M:N] be Jones' index, then

$$\log[M:N] = \sup\{\|S(A|E(A))\|;\ 0 \leqq A \leqq 1, A \in M\}.$$

From the viewpoint of the theory of operator means established by Kubo and Ando [10], this relative operator entropy is an operator version of Uhlmann's relative entropy [16] which is formulated by the interpolation theory.

An operator mean m is determined by a nonnegative operator monotone function f on $(0,\infty)$ with the correspondence

$$A \; m \; B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A.$$

The Uhlmann's formulation can be rewritten in the words of operator means as follows;

$$\lim 1/r \ (A g_r B - A) = A^{1/2}(\log A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

where $A g_r B = A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^r A^{1/2}, \quad 0 \leqq r \leqq 1$.

The relative entropy is given by the mean correspondence to an operator monotone function logx but not an operator mean, so we introduce the solidarities as a generalization of the operator means [8].

According to Uhlmann's formulation, we give a transformation from a class of operator means to a class of solidarities, which we call Uhlmann's transformation. In paticular, the power means give a parameterized estimation of the relative operator entropy [7].

References

[1] H. Araki: Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11(1976), 809-833.

[2] H. Araki: Relative entropy for State of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13(1977), 173-192.

[3] J. I. Fujii: On geometric and harmonic means of operators, Math. Japon., 24(1979), 203-207.

[4] J. I. Fujii: Operator concave function and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25(1980), 453-461.

[5] M. Fujii: On operator concavity related to means of operators, Math. Japon., 30(1985), 283-288.

[6] J. I. Fujii and E. Kamei: Relative operator in noncommutative information theory, to appear Math. Japon..

[7] J. I. Fujii and E. Kamei: Uhlmann's interpolational method for operator means, to appear.

[8] J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo: An extention of the Kubo-Ando theory: Solidarities, Preprint.

[9] J. I. Fujii and Y. Seo: Jones' index and the relative operator entropy, to appear Math. Japon..

〔10〕 F. Kubo and Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., 248(1980), 205-224.

〔11〕 F. Kubo: On Logarithmic operator means, 10th Symp. Appl. Func. Anal. (ed. by Umegaki), Sci. Univ. Tokyo, 1987, 47-61.

〔12〕 T. P. Lim: The power mean and the logarithmic mean, Amer. Math. Monthly, 81(1974), 879-883.

〔13〕 M. Nakamura and H. Umegaki: A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., 37(1961), 149-154.

〔14〕 J. von Neumann: Die mathematschen grundlagen der quantenmeckanic, Springer - Berlin, (1932).

〔15〕 W. and S. L. Woronowicz: Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. on Math. Phys., 8(1975) 159-170.

〔16〕 A. Uhlmann: Relative entropy and Wigner-Yanase-D. on-Lieb concavity in interpolation theory, Commun., Math., Phys., 54(1977), 22-32.

〔17〕 H. Umegaki: Conditional expectation in an operator algebra IV, Kodai Math. Sem. Rep., (1962), 59-85.

〔18〕 H. Umegaki and M. Ohya: "Quantum Mechanical Entropies (in Japanese)", Kyoritsu Publishing Company (1984).